

TD₂ – Polynômes, Analyse asymptotique

Exercice 1 ★

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par le polynôme $(X - a)(X - b)$. On commencera par le cas où $a \neq b$.

Exercice 2 ★★

Déterminer les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ qui vérifient :

$$\text{a) } P(X + 1) = P(X) \quad \text{b) } (X + 1)P(X) = (X - 2)P(X + 1).$$

Exercice 3 ★★★★★

Déterminer les entiers $n > 1$ pour lesquels le polynôme $P = (X - 1)^n - (X^n - 1)$ admet une racine de multiplicité au moins 2.

Exercice 4 Polynômes de Tchebychev de première espèce ★★

On définit la suite de polynômes de Tchebychev par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X)$$

1. (a) Expliciter T_2 et T_3
 (b) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le degré de T_n et son coefficient dominant.
 (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$
2. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$

$$\cos((n+2)x) + \cos(nx) = 2\cos(x)\cos((n+1)x)$$

- (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$

$$T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$$

Exercice 5 ★★

On pose $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$.

1. Étudier f .
2. Montrer que f réalise une bijection de $] -1, 1[$ sur un intervalle à déterminer, et que la réciproque notée f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3. Montrer que f^{-1} admet un développement limité en 0 à tout ordre, préciser celui à l'ordre 3 si possible.

Exercice 6 ★★

En exploitant des formules de Taylor, montrer les inégalité suivantes :

1. Pour tout $x \geq 0$, $0 \leq \sqrt[3]{1+x} - 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} \leq \frac{5x^3}{81}$.
2. Pour tout $(x, h) \in \mathbb{R}^2$, $\left| \cos(x+h) - \cos x + h \sin x + \frac{h^2}{2} \cos x \right| \leq \frac{|h|^3}{6}$.

Exercice 7 ★★

En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que les suites suivantes convergent et déterminer leurs limites :

$$a) u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \quad ; \quad b) u_n = \sum_{k=0}^n \frac{3^{k-2}}{k!}.$$

Exercice 8 ★★

Déterminer les DL suivants :

- a) $\frac{\tan x - x}{x^3}$ en 0 à l'ordre 2 b) $\frac{\cos x - 1}{e^x - 1 - \sin x}$ en 0 à l'ordre 2
- c) $\sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}}$ en $+\infty$ à l'ordre 2 d) $\ln(1 + \cos x)$ en 0 à l'ordre 4
- e) $\tan(x)$ en $\frac{\pi}{4}$ à l'ordre 3 f) $\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \frac{\sin \theta}{1 + 2 \cos \theta}$ en $\frac{2\pi}{3}$ à l'ordre 1

Exercice 9 ★★

On pose, pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$. Montrer que l'on peut prolonger f en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 10 ★★★

Effectuer l'étude complète de chacune des fonctions suivantes (en particulier : asymptotes, prolongements éventuels et variations). Tracer l'allure de la courbe.

$$a) f(x) = \frac{x \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x) - 1} \quad b) f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) \quad c) f(x) = x \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

Exercice 11 ★★★★★

Soit $\lambda \in]0, 1[$ donné. Soit $f_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ et $f(x) = e^x$.

- Déterminer, sur $\mathbb{R}$, la position du graphe de f_n par rapport à celui de f .
- Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f_n(x) = 0$.
- Prouver l'existence et l'unicité de la racine positive x_n de l'équation $f_n(x) = \lambda f(x)$. Montrer que la suite (x_n) admet une limite qu'on déterminera.

Exercice 12 ★★★★★

Soit f continue sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, 2f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t) dt$.

- Montrer que f est nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f est impaire.
- Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$. Conclure.
- Etudier la réciproque.

Exercice 13 ★★★★★

Déterminer toutes les fonctions f , dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs réelles telles que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. On pourra montrer que, si f est solution, alors f vérifie une équation différentielle du second ordre que l'on intégrera en posant $t = \ln(x)$.

Exercices issus d'oraux

Exercice 14 ★★

(Oral 2013, 2018)

Soit f définie par $f(x) = x \ln(5 + \sin(x))$ sur $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

1. Justifier que f est bien définie et $\mathcal{C}^1$. Calculer $f'(x)$.
2. Encadrer $g(x) = \ln(5 + \sin(x))$ et $h(x) = \frac{1}{5 + \sin(x)}$. En déduire les variations de f .
3. Montrer que f est une bijection de I vers un intervalle J à préciser.
4. Écrire un développement limité de f à l'ordre 4 en 0 et en déduire la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ de f en $(0, f(0))$ ainsi que la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette tangente.

Exercice 15 ★★★★★

(Oral 2013)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + x^2 - 3x^3$.

1. Déterminer le plus grand intervalle I contenant 0 sur lequel f est bijective.
2. On appelle g la fonction réciproque de f sur I . Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de g .

Exercice 16 ★★★★★★

(Oral 2012, 2013)

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X) \times P(X + 1)$.

Exercice 17 ★★

(Oral 2018)

Soit n un entier naturel impair, on considère $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $(E) : (X^n + 1)P(X) = P(X^2)$

1. Montrer que le polynôme $X^n - 1$ vérifie la relation (E) .
2. Déterminer le degré du polynôme P .
3. Notons ω une racine n -ième de -1 , montrer que $-\omega$ est racine de P .
4. Quels sont tous les polynômes vérifiant l'équation (E) ?

Exercice 18 ★★

(Oral 2021)

$$\text{Soit } f(t) = \begin{cases} \frac{1 - e^{-t}}{t} & \text{si } t \in \mathbb{R}^* \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement positive.
2. Étudier la monotonie de f .
3. Déterminer l'équation de la tangente en 0 à la courbe représentative de f .
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .